

## Análise Probabilística de Falha por Fadiga Mecânica

Lino CE§

§ Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia São Paulo, Brasil.

**Resumo:** Os fenômenos mais comuns de falha em componentes mecânicos é a fadiga mecânica. O experimento de fadiga mostra que o coeficiente da variação de dados na vida em fadiga tem uma variação de até 40%. Esses dados significam que a previsão que determina a vida em fadiga pode não ser válida, portanto, por isso foi realizado um método baseado na probabilidade para calcular a falha de danos por fadiga. A metodologia de previsão da probabilidade de falha foi baseada no conceito de dano. Os ciclos aumentam gradativamente, da fração do dano até atingir o ponto crítico onde um componente pode ocorrer a falha. O dano é uma função da resistência máxima e do limite de fadiga, em que ambos são modelados como variáveis aleatórias na distribuição normal. A validação é feita variando o desvio padrão de cada variável aleatória.

**Palavras Chaves:** Ciclos, Dano, Fadiga, Probabilidade, Tensão

**Introdução:** A Fadiga Mecânica é um fenômeno complexo caracterizado pela nucleação e a propagação de uma ou mais trincas através do componente mecânico, sujeito a cargas variantes, as quais geram tensões locais mesmo menores do que a tensão de escoamento do material, causando a falha após um determinado período (1). A superfície fraturada, em geral, tem semelhança ao de uma fratura frágil com superfície plana e perpendicular à direção da força aplicada, mesmo em materiais dúcteis (2). Essa falha ocorre de forma repentina, o que faz com que projetos dos diferentes elementos estruturais sejam desafiados, para vedar que ocorra esse tipo de fenômeno. Na literatura são registrados alguns dos acontecimentos de danos por fadiga enfocam a natureza de modelos determinística do processo (3). Uma das abordagens dos modelos determinísticas mais populares da modelagem de fadiga é a curva S-N, que se baseando em dados de teste de fadiga. Esta curva mostra a relação entre a vida em fadiga  $N$  e amplitude da tensão alternada  $S_a$ , que assume o acúmulo de danos por fadiga (4). Em um teste típico de fadiga, um corpo de prova é submetido a uma tensão de amplitude constante e o número de ciclos até ocorrer a falha, com isso são registrados um nível de tensão específico. A vida determinada por fadiga correspondente a um nível de tensão específica pode ser conhecida a partir da curva S-N. Conforme o nível de tensão aplicada, diminui o número de ciclos até a falha (5). Alguns materiais sob condições constantes de carregamento, exibem em seus diagramas S-N, amplitude de baixa tensão da qual o mesmo não está sujeito à falha por fadiga, independentemente do número de ciclos.

Os modelos de dano por fadiga determinística tendem a ser conservadores e produzem níveis indefiníveis de risco nos componentes. Em qualquer experimento de fadiga, sempre há alguma quantidade de dispersão nos dados de fadiga (6). Essa dispersão é geralmente efeito por umas variedades de fatores aleatórios. Alguns dos fatores incluem inconsistências no acabamento da superfície, desvios no alinhamento do corpo de prova, diferenças no carregamento aplicado e tensão individual inconsistente. Essas fontes de dispersão são geralmente atenuadas por meio da preparação e manuseio das amostras, calibração de equipamentos de laboratório, procedimentos experimentais replicáveis e uso de amostras idênticas feitas de material semelhante do mesmo fornecedor. Mas mesmo com essas etapas realizadas, a dispersão dos dados de fadiga ainda é observada devido a pequenas diferenças na microestrutura de cada corpo de prova, que produz diferentes condições para o início e propagação de trincas. A dispersão estatística nos dados experimentais de fadiga é muito grande, com ciclos de

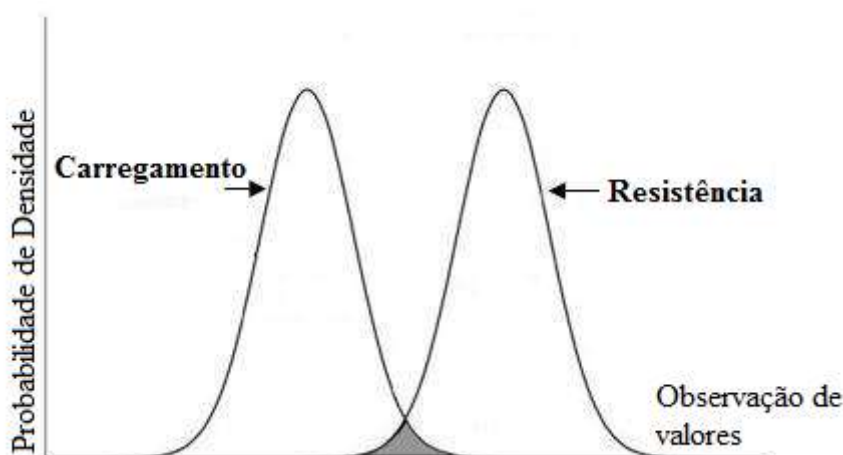
coeficiente de variação tipicamente variando de 30% a 40% e às vezes tão alto quanto 150% (7). Isso levou alguns pesquisadores a encontrar novos métodos para prever a confiabilidade e a vida útil restante dos componentes. A vantagem do método aumentará a confiança no produto final porque pode acomodar a incerteza e a economia de custos. A incerteza no carregamento de fadiga pode resultar de algumas coisas, como processo de fabricação, geometria do componente e processo de carregamento. No processo de fabricação, diferentes fabricantes terão tolerâncias diferentes na produção, portanto, o mesmo material terá propriedades mecânicas ligeiramente diferentes. Diferentes ambientes também influenciam, como um laboratório controlado dará resultados experimentais mais precisos em comparação com laboratório onde muitas distrações estão presentes. Por causa disso, mesmo sob condição experimental, com carregamento de amplitude constante, o teste de fadiga pode fornecer um número aleatório de vida em fadiga com distribuição específica. Este artigo tem o objetivo de fornecer uma metodologia e modelagem probabilística para prevenção de falha de um componente.

**Material e Métodos:** A condição de falha ocorre quando a carga é maior ou igual à resistência. Neste modelo, falha a condição do componente mecânico por causa da fadiga  $Z(n)$ , é definido quando o acúmulo de danos  $D_n$ , pode ser maior ou igual ao dano crítico  $D_{cr}$ . Acúmulo de danos  $D_n$ , e a tensão última  $S_u$  e o limite de resistência a fadiga  $S_e$  que é considerado variáveis aleatórias. A condição de falha de acordo com a definição pode ser escrita, como:

$$Z(n) = D_{cr} - D_n < 0 \quad (1)$$

Na Figura 1, ilustra a interação entre carga e resistência. Um dos modelos de acumulação de dano mais amplamente utilizado é a acumulação de dano linear, também conhecida como regra de Palmgren-Miner (8)

$$D_n = \frac{n}{N_f} \quad (2)$$



**Figura 1.** Ilustração de probabilidade de falha usando interação entre carga e resistência

onde  $n$  é o número de ciclos aplicados e  $N_f$  é o número de ciclos até a falha. Para obter o valor de  $N_f$ , Basquin (9) propôs uma equação matemática que é:

$$N_f = \left( \frac{S_{nf}}{a} \right)^{\frac{1}{b}} \quad (3)$$

$$a = \frac{(f \times S_u)^2}{S_e} \quad (4)$$

$$b = -\frac{1}{a} \log_{10} \left( \frac{f \times S_u}{S_e} \right) \quad (5)$$

onde  $S_{nf}$  é a tensão alternada corrigida,  $S_u$  é a tensão última,  $S_e$  é o limite de resistência a fadiga e  $f$  é a fração de resistência a fadiga. A tensão alternada corrigida  $S_{nf}$  é necessário porque na prática de engenharia, as condições de carregamento totalmente invertida que são a tensão máxima e a tensão mínima completamente ou a tensão média igual a zero, que é muito raro segundo Goodman (10), com isso propõe a equação matemática para calcular  $S_{nf}$  base no diagrama de Goodman:

$$\frac{S_a}{S_{nf}} + \frac{S_m}{S_u} = 1 \quad (6)$$

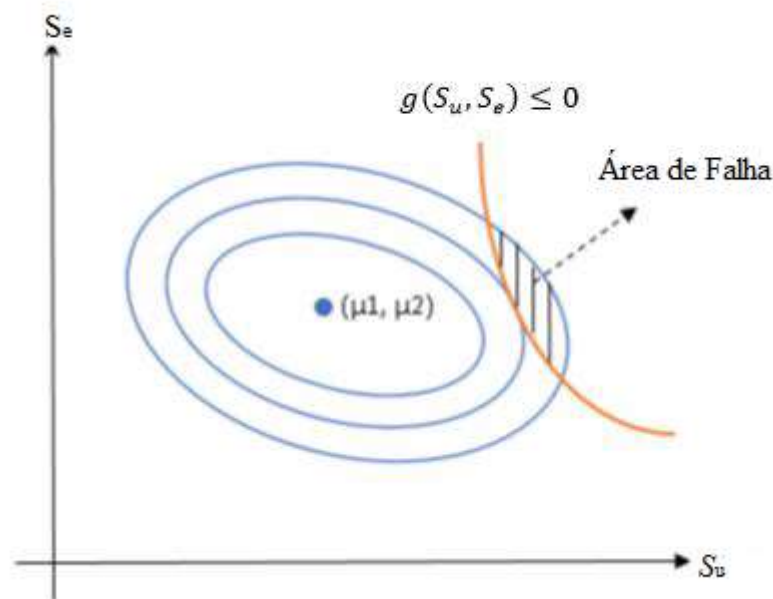
onde  $S_a$  é o tensão alternada e  $S_m$  é o tensão média. Substituindo as equações 2 e 3 por 1 para obter:

$$Z(n) = 1 - \frac{n}{\left(\frac{S_{nf}}{a}\right)^{\frac{1}{b}}} \quad (7)$$

a função de falha  $Z(n)$  é uma função de algumas variáveis, como tensão última  $S_u$ , limite de resistência a fadiga  $S_e$ , fração de resistência a fadiga  $f$ , tensão alternada  $S_a$ , e a tensão média  $S_m$ . Com esse modelo, duas variáveis que são  $S_u$  e  $S_e$  serão definidos como variáveis aleatórias com distribuição normal,  $S_u \sim N(\mu_1, \sigma_1)$  e  $S_e \sim N(\mu_2, \sigma_2)$  segundo os autores (11,12,13), as demais variáveis são constantes. Além disso, podemos definir  $Z(n)$  em função das seguintes variáveis aleatórias que são  $S_u$  e  $S_e$  ou  $Z(n) = g(S_u, S_e)$ . A probabilidade de falha pode ser definida como:

$$P(Z(n) \leq 0) = P(g(S_u, S_e) \leq 0) = \iint_{P(g(S_u, S_e) \leq 0)} f(S_u, S_e) dS_u dS_e \quad (8)$$

onde  $f(S_u, S_e)$  é função de probabilidade conjunta da variável aleatória  $S_u$  e  $S_e$ . A ilustração da probabilidade de falha pode ser vista na Figura 2.



**Figura 2.** A probabilidade de falha usando as variáveis aleatórias.

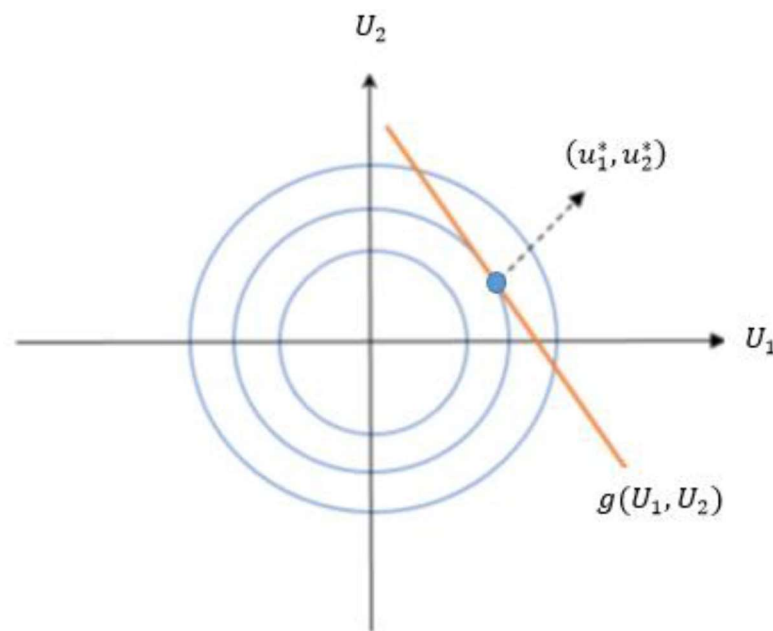
Para facilitar o cálculo, variáveis aleatórias  $S_u$  e  $S_e$  são normalizados e torna-se  $U_1 = \frac{S_u \mu_1}{\sigma_1}$  e  $U_2 = \frac{S_u \mu_2}{\sigma_2}$ . Este processo é válido enquanto  $S_u$  e  $S_e$  são considerados independentes. Além disso, também linearizando  $g(U_1, U_2)$  tornar-se :

$$g(U_1, U_2) \approx g(u_1^*, u_2^*) + \nabla g(u_1^*, u_2^*)^T \begin{pmatrix} U_1 - u_1^* \\ U_2 - u_2^* \end{pmatrix} \quad (9)$$

onde  $u_1^*$  e  $u_2^*$  são as coordenadas que fazem a distância de  $g(u_1^*, u_2^*)$  para a origem tornando-se menor. A equação (8) pode ser escrita como.

$$P(Z(n) \leq 0) \approx P(g(u_1^*, u_2^*) + \nabla g(u_1^*, u_2^*)^T \begin{pmatrix} U_1 - u_1^* \\ U_2 - u_2^* \end{pmatrix} \leq 0) \quad (10)$$

Abaixo mostra uma ilustração sobre o resultado do processo de normalização e a linearização.



**Figura 3.** Normalização das variáveis aleatórias  $S_u$ ,  $S_e$  e linearização da função de falha  $g(U_1, U_2)$ .

O método de Lagrange está sendo usado para encontrar o valor de  $u_1^*$  e  $u_2^*$ . A problemática tornou-se minimizada através de  $f(U_1, U_2) = U_1^2 + U_2^2$ .

A probabilidade de falha na Equação (10) pode ser calculada da seguinte forma:

$$P\left(g(u_1^*, u_2^*) + \nabla g(u_1^*, u_2^*)^T \begin{pmatrix} U_1 - u_1^* \\ U_2 - u_2^* \end{pmatrix} \leq 0\right) = P\left(\nabla g(u_1^*, u_2^*)^T \begin{pmatrix} U_1 - u_1^* \\ U_2 - u_2^* \end{pmatrix} \leq 0\right) \quad (11)$$

Suposto que  $\nabla g(u_1^*, u_2^*)^T = (v_1^*, v_2^*)$  e  $c = -g(u_1^*, u_2^*) - (v_1^*, v_2^*) \cdot (u_1^*, u_2^*)$

$$P\left(g(u_1^*, u_2^*) + \nabla g(u_1^*, u_2^*)^T \begin{pmatrix} U_1 - u_1^* \\ U_2 - u_2^* \end{pmatrix} \leq 0\right) = P((v_1^* U_1 + v_2^* U_2) \leq -c) \quad (12)$$

$U_1$  e  $U_2$  são variáveis aleatórias com distribuição normal padrão, então sua média é 0 e sua variância é 1. Uma vez que  $U_1$  e  $U_2$  são obtidos conceitualmente a partir de  $S_u$  e  $S_e$  então é óbvio assumir a independência. Defina uma nova variável aleatória  $X = v_1^* U_1 + v_2^* U_2$

$$P(Z(n) \leq 0) \approx P\left(g(u_1^*, u_2^*) + \nabla g(u_1^*, u_2^*)^T \begin{pmatrix} U_1 - u_1^* \\ U_2 - u_2^* \end{pmatrix} \leq 0\right) = P(X \leq -c) \quad (13)$$

onde  $X$  tem distribuição normal com média igual a 0 e variância igual  $v_1^2 + v_2^2$ .

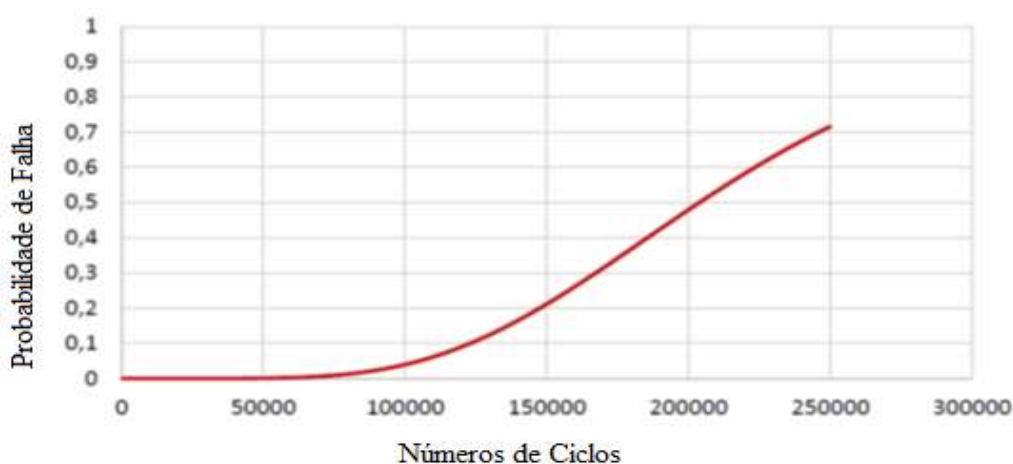
**Análise e Estudo de Caso:** Foi realizado uma análise através de um modelo matemático, para prever a probabilidade de falha em um componente mecânico, através do carregamento e por fadiga. Foi aplicado neste modelo a probabilidade de falha do alumínio 6061-T6 e foi realizado algumas variações sobre seu dano crítico, desvio padrão da resistência máxima e desvio padrão do limite de fadiga, para garantir a precisão do modelo. A Tabela 1 resume os dados usados para o cálculo.

**Tabela 1.** Dados para calcular a probabilidade de falha 6061-T6 Alumínio.

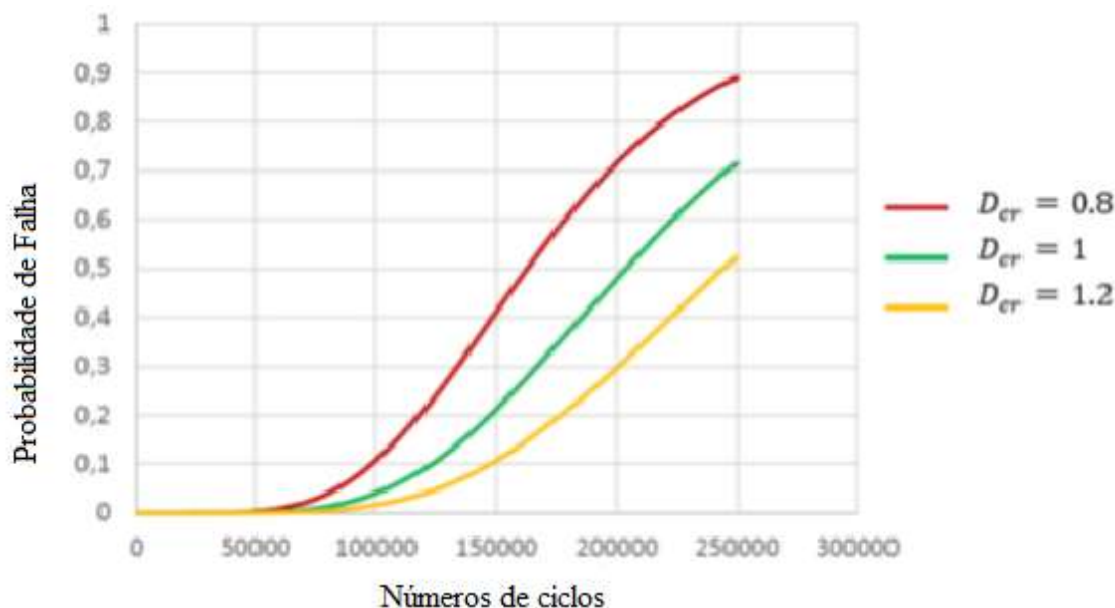
Variável Aleatória				Variável Constante	
Variável	Distribuição	Média	Desvio Padrão	Variável	Valor
Tensão Última $S_u$	Normal	310 Mpa	15 Mpa	Dano Crítico $D_{cr}$	1
Limite de Fadiga $S_e$	Normal	95 MPa	5 Mpa	Tensão Alternada $S_a$	220 MPa
				Tensão Média $S_m$	0
				Fração à res. fadiga $f$	0.9

O valor da tensão última  $S_u$ , e do limite de resistência a fadiga  $S_e$  são obtidos através do ASM *Metals Handbook* (14) e o valor do desvio padrão é 5% de sua média. Tensão alternada  $S_a$  e tensão média  $S_m$  valor é variável depende da pesquisa, enquanto o valor da fração de resistência à fadiga  $f$  é encontrado para ser 0,9 para material com resistência final inferior a 482 MPa.

A Figura 4 mostra a relação entre a probabilidade de falha e o número de ciclos de uso do componente. A probabilidade de falha permanece mais baixa (quase constante) para o período inicial e começa a aumentar à medida que os ciclos de uso aumentam. A parte anterior do gráfico que mostra a probabilidade quase constante de falha, pode ser representada como o período de início da trinca, enquanto o aumento da probabilidade da fase de falha é um indicativo do período de propagação da trinca. A partir da figura, o modelo matemático desenvolvido pode ser concluído como válido, pois a probabilidade de falha aumenta com o aumento dos ciclos.


**Figura 4.** Gráfico de probabilidade de falha para Tensão Alternada de 220 MPa.

Outra validação é necessária para garantir que o modelo matemático fornece resultados precisos. A Equação 7 afirma que a condição de falha, ocorrerá quando o dano devido aos ciclos atingir o dano crítico. Na maioria dos casos, o valor do dano crítico é assumido como 1, mas foi observado que os valores do dano crítico podem variar de 0,5 a 2,2 (15). Para validar o modelo matemático, três valores diferentes de dano crítico são testados.

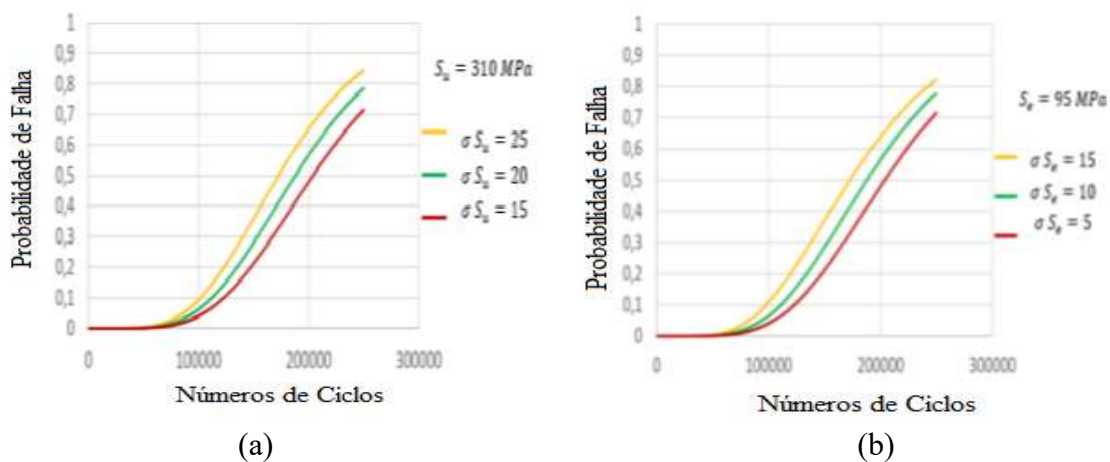


**Figura 5.** Probabilidade de falha com base em diferentes valores de  $D_{cr}$ .

A Figura 5 mostra a probabilidade de falha para três valores diferentes de  $D_{cr}$ . Este gráfico de probabilidades de falha, revela a tendência de aumento da probabilidade com diminuição no valor de  $D_{cr}$ . O dano crítico  $D_{cr}$  é o valor do dano de limite antes que a falha por fadiga aconteça, quando o valor de  $D_{cr}$  for diminuída, a probabilidade de falha por fadiga aumentará.

A partir da Figura 5, pode-se concluir que variando o valor de  $D_{cr}$  o modelo matemático dá resultados precisos.

A tensão última  $S_u$  e limite de resistência a fadiga  $S_e$  são variáveis aleatórias com distribuição normal. Nos dois cálculos anterior, o desvio padrão de  $S_u$  é 15 MPa e o desvio padrão de  $S_e$  é 5 MPa. Diferentes valores de desvios padrões afetarão a probabilidade de falha. Desvio padrão afetará a forma da distribuição normal e o maior desvio padrão significa que os dados estão mais dispersos da média.



**Figura 6.** (a) Probabilidade de falha com base em diferentes valores e desvio padrão da tensão última. (b) Probabilidade de falha com base em diferentes valores de desvio padrão do limite de resistência a fadiga.

Sabemos pela Equação 7 que a probabilidade de falha  $Z(n)$  é uma função de  $S_u$  e  $S_e$ , por causa disso variando o desvio padrão de  $S_u$  e  $S_e$  isso afetará o valor de  $Z(n)$ . As Figuras 6a e 6b mostram que o maior desvio padrão implica na maior probabilidade de falha. Isso ocorre porque aumentar o desvio padrão fará com que a área de falha também aumente.

**Conclusão:** Foi desenvolvida uma abordagem de probabilidade baseada em danos acumulativos para prever a probabilidade de falha do componente sujeito a carregamento. A metodologia usa um modelo de interferência de resistência de carga e assume a resistência máxima e o limite de fadiga como variáveis aleatórias com distribuição normal. Danos críticos, desvio padrão da resistência final e desvio padrão do limite de fadiga são três fatores que afetam a probabilidade de falha deste componente. Ao diminuir o valor do dano crítico aumentará a probabilidade de falha, enquanto diminuir o desvio padrão da resistência máxima e do limite de fadiga irá diminuí-lo.

## Referências

- (1) Shigey, J. E.; Mischke, C. R.; Budynas R. G.; Projeto de Engenharia Mecânica. Bookman: Porto Alegre, 2005.
- (2) Norton, R. L.; Machine design: an integrated approach. 5ª ed. Boston: Prentice Hall, 2014.
- (3) Weibull, W.; A Statistical Theory of the Strength of Materials. Generalstabens Lito-grafiska Anstalts Förlag, Stockholm.1939, 151.
- (4) Weibull, W.; The phenomenon of rupture in solids. Generalstabens Lito-grafiska Anstalts Förlag, Stockholm.1939b, 153.
- (5) Vassilopoulos, A. P.; Nijssen, R. P. L.; Fatigue life prediction of composite materials under realistic loading conditions (variable amplitude loading), Woodhead Publishing Series in Composites Science and Engineering. 2010, 293-333
- (6) Philippidis, T. P.; Vassilopoulos, A. P.; Life prediction methodology for GFRP laminates under spectrum loading, Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. 35, 6, 2004, 657-666
- (7) Sundarajan, C. R.; Probabilistic Structural Mechanics Handbook: Theory and Industrial Applications. Chapman & Hall: New York, 1995
- (8) Miner, M. A.; Cumulative damage in fatigue. Journal of Applied Mechanics. 1945, 67, A 159-A 164.
- (9) Budynas R. G. ; Nisbett, J. K. Elementos de Máquinas de Shigley. 10ª ed. Rio de Janeiro: AMGH, 2016.
- (10) Goodman, J.; Mechanics Applied to Engineering. Green & Company: London, 2010.



- (11) Collet, M.; Bruggi, M.; Duysinx, P.; Topology optimization for minimum weight with compliance and simplified nominal stress constraints for fatigue resistance, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2017, 55, 839–855.
- (12) Karlen, K.; Olsson, M.; An investigation of a fatigue model with two competing failure mechanisms. *International Journal of Fatigue*. 64, 2014, 131-139.
- (13) Norber, S.; Olsson, M.; The effect of loaded volume and stress gradient on the fatigue limit *International Journal of Fatigue*, 2007 29(12) 2259-72.
- (14) ASM International Handbook Committee, *ASM Handbook Volume 2 : Properties and selection: nonferrous alloys and special-purpose materials*, 10th ed., 1990. Materials Park.
- (15) Havrisik, D. M. ; *Probabilistic Methods in Structural Design and Analysis, Probabilistic Methods Applied to Electric Power Systems*. 1999, 11–13, 19-29